1) $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$, kde $u = (x,y,z,t)^2$. Najděte analytické vyjádření vzhledem k $X = \{(1,1,1,1)^T, (1,1,1,0)^T, (1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T\}$

$$B_X = [id]_{XK}^T \, B \, [id]_{XK} \qquad [id]_{XK} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad [id]_{XK}^T \cdot B \cdot [id]_{XK} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

---

2) Rozhodněte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje forma g t.ž.:

$g((1,0,0)^T) = 1$, $g((0,1,0)^T) = 2$, $g((0,0,1)^T) = 3$, $g((1,0,1)^T) = 4$, $g((1,1,0)^T) = 5$, $g((0,1,1)^T) = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad f(v_i, v_j) = \frac{1}{2}\left(g(v_i + v_j) - g(v_i) - g(v_j)\right)$$

Určete signaturu kv. formy dané maticí

Postup:

1) spočítat vlastní čísla, diagonalizovat, pak převést na $-1, 0, 1$

2) Gaussova eliminace t.ž. zároveň eliminuje řádky i sloupce stejnými úpravami

a) 1)
$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad p_A(t) = (10-t)\cdot(2-t) - 1$$
$$= t^2 - 12t + 19 \qquad t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{68}}{2} \approx 8, \approx 4 \implies \text{obě kladná, tedy } sig(2,0,0).$$

2)
$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & \frac{19}{10} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} \end{pmatrix}$$

Polární báze

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \end{array}\right)$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{3} \end{pmatrix} \Rightarrow sig(2,1,0)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$= sig(2,1,0)$

Určete signaturu reální kv. formy:

d) $g\left((x_1, x_2, x_3, x_4)^T\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim$

Určete signaturu v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$a < 0$: $sig(1,2,0)$

$a = 0$: $sig(1,1,1)$

$a > 0$: $sig(2,1,0)$