1. Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

- skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.
b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.
c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.
d) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1)$, $\mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$.
e) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.
f) $\mathbf{x}^T = (1, 2, 1, -2i)$, $\mathbf{y}^T = (i, 2i, i - 1, 2)$.
g) $\mathbf{x}^T = (1, 1 + i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)

a)

$= 4\cdot 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot(-2) = 8$ } sk. součin

$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

$= \|x\| = \sqrt{4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3} = \sqrt{29}$
$= \|y\| = \sqrt{1\cdot 1 + 5\cdot 5 + (-2)\cdot(-2)} = \sqrt{30}$ } eukl. normy

$= \|x - y\| = \|(3, -3, 5)^T\| = \sqrt{9+9+25} = \sqrt{43}$ } vzdálenost

? $x \perp y$ Ne, protože $\langle x|y\rangle \neq 0$ } úhel

b)

$= 3 + (-3) - 4 = -4$
$= \|x\| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$
$= \|y\| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$
$= \|x - y\| = \|(2, 4, -4)\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$

f)

$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x\bar{y} = -i - 4i - i - 1 - 4i = -10i - 1$
$= \|x\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 4} = \sqrt{10}$
$= \|y\| = \sqrt{+1 + 4 + 2 + 1} = \sqrt{11}$
$= \|x - y\| = \|(1 - i, 2 - 2i, -i + 2, -2i - 2)\| = \sqrt{2 + 8 + 5 + 8} = \sqrt{23}$

$x \not\perp y$ nejsou kolmé!

2. Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

- skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

vzhledem ke skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^3$ dánému předpisem:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.
b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.
c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.
d) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

a) $\langle x|y\rangle = 4\cdot 1 + 2\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot(-2) + 2\cdot(-2) + 3\cdot 5 = 13$

$\|x\| = \sqrt{4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3} = \sqrt{50}$

$\|y\| = \sqrt{1\cdot 1 + (-3)(-3) + 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-2) + (-3)\cdot 2} = \sqrt{14}$

$\|x - y\| = \|(3,3,-5)^T\| = \sqrt{9+9+50-15-15} = \sqrt{38}$

kolmé nejsou

b) $\langle x|y\rangle = 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 2\cdot(-2)\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) + 1\cdot 2 = 0$

$\|x\| = \sqrt{9+1+8-2-2} = \sqrt{14}$

$\|y\| = \sqrt{1+9+8-6-6} = \sqrt{6}$

$\|x-y\| = \|(2,4,-4)^T\| = \sqrt{4+16+32-16-16} = \sqrt{20}$

$x \perp y$ jsou kolmé! $\iff \langle x|y\rangle = 0$

Tohle bude téma další přednášky na příští týden

3) Najděte $\perp$ dvojice:

- $(1,2,3)$
- $(5,2,-3)$
- $(-2,-1,-4)$

$1,2 = \sqrt{5+4-9} = 0$ $\perp$

$1,3 = \sqrt{-2-2-12} = \sqrt{-16}$ $\cancel{\perp}$

$2,3 = \sqrt{-10-2+12} = 0$ $\perp$

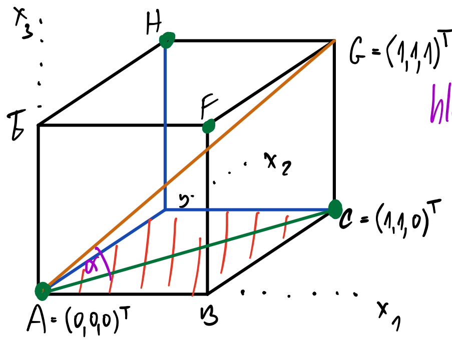
Kolmost:

- reflexivita ×
- symetrie ✓
- tranzitivnost ×
- ireflexivita ×

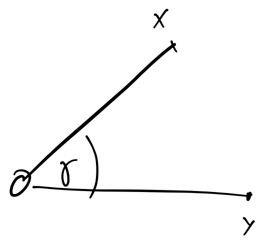
4. Určete kosinus úhlu, který svírá hlavní úhlopříčka krychle s podstavou. Podobně spočítejte kosinus úhlu mezi podstavou čyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajícího vrcholu. Spočítejte také kosinus úhlu mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou.

   Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisejí?

   Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?



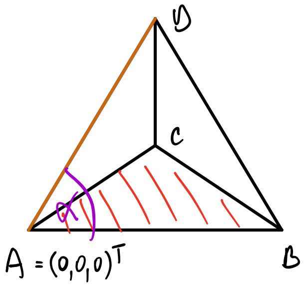
hledám α mezi $|GA|$ a $|AC|$



$$\cos(\alpha) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos(\gamma)\cdot\|x\|\cdot\|y\| = \langle x|y\rangle$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$



Zajímá mě úhel mezi podstavou a úsečkou |AD|