A je diag. $\iff A = R \cdot J \cdot R^{-1}$ $\quad R \dots$ je reg

$J \dots$ diagonální $\qquad O \in K^{n \times n}$

C-H věta: „$P_A(t) = 0$"

$$\hookrightarrow P_A(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \implies \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = O$$

1) Ukažte, že CH platí pro diagonalizovatelné matice:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (RJR^{-1})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i R J^i R^{-1} = R \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i J^i\right) R^{-1}$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i J^i = \begin{pmatrix} \sum a_i \lambda_1^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \sum a_i \lambda_2^i & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum a_i \lambda_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = O$$

tohle musí být pro všechny vlastní čísla ale rovno 0.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t) \cdot \left((1-t)\cdot(3-t) + 1\right)$

$4 - 4t + t^2$

$\lambda_1 = 1$ – alg. násobnost 1

$\lambda_2 = 2$ – alg. násobnost 2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = c \cdot (2, -1, 1)^T$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_2 = c \cdot (1, 0, 1)^T$ – geo. násobnost 1

$AR = RJ$, $A = R\cdot J\cdot R^{-1}$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\
R & 2 & 1 & \vdots \\
 & -1 & 0 & \vdots \\
 & 1 & 1 & \vdots \\
\hline
A & & & \\
1\ 1\ 1 & & & \\
0\ 1\ 0 & Au_1 & Au_2 & Au_3 \\
-1\ 0\ 3 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
J & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 2 & 1 \\
 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
R \quad u_1\ u_2\ u_3 & & & \\
2\ \ 1\ -1 & & & \\
-1\ \ 0\ \ 0 & 1u_1 & 2u_2 & u_2+2u_3 \\
1\ \ 1\ \ 0 & & &
\end{array}
$$

vlastní čísla

tohle je blok vlastního čísla 2.

$$Au_1 = 1u_1$$
$$Au_2 = 2u_2$$
$$Au_3 = u_2 + 2u_3$$

tohle je neznámá

$$Au_3 - 2u_3 = u_2$$
$$(A-2I)u_3 = u_2$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$x_2 = t$

$x_2 = 0$ $\quad (t, 0, t)^T$ $\qquad u_3 = (t-1, 0, t)^T$

$x_1 = t$

pro $t=0$, např.

množina řešení dané soustavy

vektor odpovídající množině všech řešení

Odvoďte vztah mezi $\det(A^H)$ a $\det(A)$

- $\det(A) = \det(A^T)$
- součin komplexně sdružených čísel je komplexně sdružené číslo součinu → stejné tak pro součet

$\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\cdot b}$

$$\det(A^H) = \overline{\det(A)}$$

$$\sum_{p\in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(p)} \prod_{i=1}^{n} (A^H)_{i,p(i)} = \sum_{p\in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(p)} \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{p(i),i}} = \sum_{\substack{q\in S_n \\ q=p^{-1}}} (-1)^{\mathrm{sgn}(q)} \prod_{j=1}^{n} \overline{a_{j,q(j)}} = \sum_{q} (-1)\left(\prod_{j} a_{j,q(j)}\right) =$$

$$= \overline{\left(\sum (-1)^{\operatorname{sgn}(p)} \prod_j a_{j,p(j)}\right)} = \overline{\det(A)}$$

$$A^H = A^{-1}$$

$$A^H A = A^{-1} A = I_n$$

b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}$

$$A^H = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3i & -4i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3i & -4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → tzn. že je unitární