# Úlohy ke cvičení

→ Stačí ověřovat násobnosti / eigenpočty

1. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

   Rozhodněte, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

   ? – najít počet vlastních čísel

   ? – najít počet vlastních vekt.

   Musí být n...

2. U matice
   $$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$
   známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a $5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

3. Určete vlastní čísla matice
   $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Rozložte následující matici na součin $\mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární a matice $\mathbf{J}$ je v Jordanově normálním tvaru.

   a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

5. S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocnimu následující matice (Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

   a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   (tato není diagonalizovatelná)

A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ A je podobná diagonální D, t.j. $R^{-1}AR = D$

($AR = RD$)

$\Leftrightarrow \exists n$ vlastních vektorů LNZ

1) $A\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} : p_A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 5 & -3-t & 3 \\ -1 & 0 & -2-t \end{pmatrix} = (2-t)(-3-t)(-2-t) + 3 - 6 - 2t - 10 - 5t =$

$= (t^2-4)(t+3) - 13 - 7t = -t^3 + 4t - 3t^2 + 12 - 13 - 7t = -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 = \underline{\underline{-(t+1)^3}}$

$\lambda = -1$ (je alg. trojnásobné, takže stačí)

Nyní vektory:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= -t \\ x_1 &= -t \end{aligned}$$

# volných proměnných $= 1 \Rightarrow \dim(\ker) = \underline{1 < 3}$

Nemá tři vektory, není diagonalizovatelná

$B\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} : p_B(t) = \begin{pmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)(-t-1)(-t+1) =$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\underline{2 \quad -1 \quad 1}$

Mám tři eigenvalues, takže musí existovat i tři vektory, protože každé vlastní číslo má svůj vektor

$$B_{-1}: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= -t \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{R^{-1} A R = D}}$

$2: \; c \cdot (1,0,0)^T$

$-1: \; c \cdot (0,-1,1)^T$

$1: \; c \cdot (1,0,1)^T$

je podobná diag. matici, je diagonalizovatelná

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot R = R \cdot \underline{D}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} : C_p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 0 & 1-t & -4 \\ -1 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\cdot(1-t)\cdot(4-t)-4$$

$$(1-t-t+t^2)\cdot(4-t)-4$$

$$4-4t-4t+4t^2-t+t^2+t^2-t^3-4$$

$$-t^3+6t^2-9t=0$$

$$-t^3+3t^2+3t^2-9t=0$$

$$-t^2\cdot(t-3)+3t\cdot(t-3)=0$$

$$(3t-t^2)\cdot(t-3)=0$$

$$t\cdot(3-t)\cdot(t-3)=0$$

$$0 \quad 3 \quad 3$$

$$C_2 : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\} (1,1,1)^T$$

Alg. nás = 2

Geo. nás. = 1

tedy není diagonalizovatelná

2. U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

Známe tři eigenvalues:

$3, -4, 5$

Jak na to?

– Konst. člen. $p_A(t)$ je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = |A|$

$$\to \lambda_4 = \frac{|A|}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}$$

– 2. nejvyšší: $p_A(t)$ je $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$10+5+15-19 = 3-4+5+\underline{\underline{x}}$$

$$\| \\ 7$$

3. Určete vlastní čísla matice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-t \end{vmatrix} = (1-t)\cdot \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 7 & -3-t \end{vmatrix}$$

4

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ : $p_A(t) = \begin{vmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{vmatrix} = (-11-t)\cdot(24-t) + 300 =$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4\cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

kandidát na diagonální matici

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -20 & 30 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = t$

$-2x_1 + 3t = 0$

$x_1 = \frac{3}{2}t$

$v_1 = c\cdot(3,2)^T$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = c\cdot(2,1)^T$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = RJR^{-1}$$

$$A^3 = RJ\cancel{R^{-1}R}J\cancel{R^{-1}R}JR^{-1}$$

$$= RJ^3R^{-1}$$

4/5

B $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ $p_B(t) = \begin{vmatrix} -t & 2 & -2 \\ 1 & -1-t & 5 \\ 2 & -4 & 8-t \end{vmatrix} = -t \cdot (-1-t) \cdot (8-t)$

$+ 20 + 8 - 20t - 16 + 2t$