

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 1 = 1$$

nach \mathbb{Z}_5

per die 2. rachen

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 3 = 1$$

per die 3. spalten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-16}}$$

$$48 - 80$$

$$- 32$$

$$+ 96$$

$$42 - 70$$

$$- 28 \cdot 4 = -112$$

4)

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & -x \\ 0 & x & \dots & 0 & -x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & x & & \\ 0 & & & & \\ & & & & x \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-1} \cdot \left(x + \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

6) $17 | 697$ & $17 | 476$ & $17 | 969$

$$17 \mid \begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 697 \\ 4 & 7 & 476 \\ 9 & 6 & 969 \end{vmatrix} =$$

$\begin{matrix} 100x & 10x & x \\ \curvearrowright & & \end{matrix}$

$$= 17 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & \frac{697}{17} \\ 4 & 7 & \frac{476}{17} \\ 9 & 6 & \frac{969}{17} \end{vmatrix} \Rightarrow \in \mathbb{Z} \Rightarrow \det \in \mathbb{Z}$$

