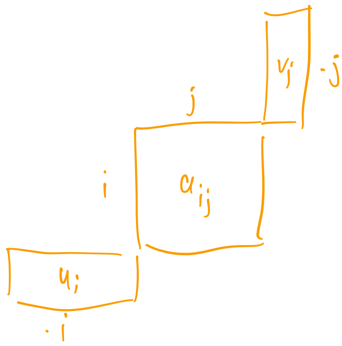
Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 2a \qquad a > 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \qquad (a-1)\cdot(a+1) > 0 \qquad a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$|a| = a$$



$$A = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ je matice bilineární formy na $\mathbb{K}^3$

Určete analytické vyjádření této formy: $= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} u_i v_j = u^T A v$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$g(u) = u^T A u$$
$$f(u,v) = u^T A v$$

$$u_1 v_1 + 2u_2 v_1 - 2u_3 v_1 - 2u_1 v_2 + 2u_3 v_2 - u_2 v_3$$

$$g(u) = f(u,u) = u_1^2 - 2u_1 u_3 + u_2 u_3 + 0 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\left((u_1, u_2, u_3)^T, (v_1, v_2, v_3)^T\right) = u_1 v_1 + u_2 v_3$$

A' neexistuje, protože $\frac{1}{2}$ v $\mathbb{Z}_2 = 0$

Rozhodněte, zda-li platí $g(u) > 0$ $\forall$ netriviální $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Tedy jestli je pozitivně definitní!

a) $g(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) $g(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2a x_2 x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 4-(a-1)\cdot(a-1) \end{pmatrix}$$

$$4 - (a-1)^2 > 0$$
$$(a-1)^2 < 4$$
$$a \in (-1, 3)$$

Forma g má vzhledem ke kan. bázi K anal. vyjádření:

$$g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2, \quad \text{kde } u = (x,y,z,t)^T.$$

Najděte vyjádření vůči bázi $X = \{(1,1,1,1)^T, (1,1,1,0)^T, (1,1,0,0)^T, (1,0,0,0)^T\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[u]_X \rightsquigarrow [u]_K = {}_X[id]_K [u]_X$$

$$[u]_X \cdot {}_X[id]_K = [u]_K$$

$$[id]_{XK} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

!! Převod mezi bázemi !!

$$[u]_K = (4,4,4,3)^T$$

$$g(u) = \left([id]_{XK} [u]_X\right)^T A \, [id]_{XK} \cdot [u]_X$$

$$= [u]_X \cdot \underbrace{[id]_{XK} \cdot A \cdot [id]_{XK}}_{B} \cdot [u]_X$$

$B \dashrightarrow$ matice g vůči X