Příští písemku: Choleského rozklady

**Rozhodněte, zda-li je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy a determinantu. Pokud ano, udělejte Choleského rozklad.**

1a) Gauss: → pouze shora dolů, nesmím prohazovat

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

=> Všechno na diagonále je kladné => Je pozitivně definitní

Det:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad |2| = 2$$

==> Všechny jsou kladné, tedy je pozitivně definitní

Choleského rozklad:

→ Matici U vyplňuji po řádcích

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & & U & \\ & & & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ U^H & & & 0 & 0 & 2 \\ \hline \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$A = U^H U$

1b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=> Je pozitivně definitní

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + |1| = 36 + 44 + 2 + 1 = 83$$

$88 + 8 + 8 - 8 - 8 - 44 = 44$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & U & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 2 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 & 0 \\ U^H & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

$A = U^H U$

1)c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}$$

2) Ukažte, že pro pozitivně definitní matice $A, B$ platí: $A+B$ i $A^{-1}$ jsou pozitivně definitní.

– $A$ i $B$ jsou hermitovské $:=$ $A = A^H$, $B = B^H$ → Součet je opět hermitovský

$$(A+B)^H = A^H + B^H = A + B$$

$x^H A x > 0$

$x^H B x > 0$

chceme $x^H (A+B) x > 0$

$x^H A x + x^H B x > 0$ → Obě složky jsou kladné, pak i celkový součet je kladný.

$A^{-1}$

$x^H A x > 0$  Je $A$ reg.? → ANO! $\Leftarrow |A| > 0$

Jelikož $|A| > 0$, pak $|A \cdot A^{-1}| > 0$, tedy i $|A^{-1}| > 0$

$$x^H A^{-1} x = \underbrace{x^H A^{-1H}}_{y^H} A^H \underbrace{A^{-1} x}_{y} = y^H A^H y > 0$$

Kvíz z přednášky:

1) Je-li A hermitovská, pak $BAB^H$ je hermitovská

a) vždy  b) pro $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  c) pro B hermitovská

$\left(BAB^H\right)^H = {B^H}^H A^H B^H = BAB^H$

2) Kolik má pozitivně definitní matice řádu 4 rozkladů $U^H U$ s horní trojúhelníkovou maticí U?

a) 1  b) 2  c) 4  d) 16  e) nekonečně mnoho

Na diagonále odmocňuji kladná čísla, tedy si můžu vybrat znaménko => $2^4$

3) Je-li $u \in \mathbb{C}^n$, jaký je rozdíl mezi $u^H u$ a $uu^H$?

a) žádný  b) první je komplexní číslo, druhý je Hermitovská matice

c) první je Hermitovská, druhý je komplexní číslo

4) $A_n$ je negativně definitní matice, právě když:

a) $\det(A_i) < 0$ pro $\forall i: 1 - n$

b) $\det(A_1) < 0$ a $\det(A_i) >$ pro $\forall i: 2 - n$

c) $\det(A_i) \begin{cases} < 0 & i = 1 \pmod 2,\ i \in \{1, \dots, n\} \\ > 0 & i = 0 \pmod 2,\ i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$