Metoda rozděl a panuj!

— např.: rekurzivní MergeSort

Násobení (obrovských) čísel:

- školní algoritmus $\Theta(n^2)$
- lepší algoritmus :

X | A | B | $X = A \cdot 10^{n/2} + B$

Y | C | D | $Y = C \cdot 10^{n/2} + D$

$$X \cdot Y = AC \cdot 10^{n} + (AD + BC) \cdot 10^{n/2} + BD$$

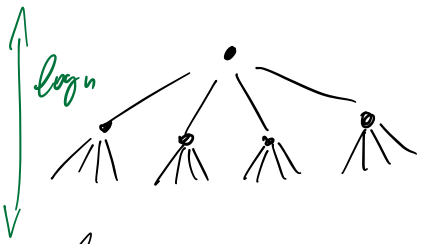
↳ 4 součiny $n/2$ cif. čísel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

$\vdots$

$$T(1) = 1$$

Strom rekurze:



# pp	velikost pp
1	n
4	$n/2$
4^2	$n/4$
$\vdots$	$\vdots$
4^i	$n/2^i$

$\log n$

listů: $4^{\log_2 n} = (2^2)^{\log n} = n^2$ $\boxed{↯}$

Trik

AC

BC

$$(A+B) \cdot (C+D) = AC + \underline{AD} + \underline{BC} + BD$$

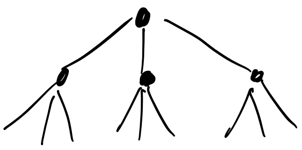
$$-AC - BD = AD + BC$$

Stačí 3 násobení čísel!

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Lepší strom rekurze



# pp	velikost pp	čas pp	čas hladiny
1	n	n	$1 \cdot n$
3	$n/2$	$n/2$	$3 \cdot \frac{n}{2}$
3^2	$n/4$	$n/4$	$3^2 \cdot \frac{n}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3^i	$n/2^i$	$n/2^i$	$3^i \cdot n/2^i$
$3^{\log_2 n}$	1		

$\log_2$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 3^i \cdot \frac{n}{2^i} = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}_{q=\frac{3}{2}}^{i} =$$

asymptoticky

$$= \frac{q^{k+1} - \cancel{1}}{\cancel{q-1}} = \Theta(q^k) = \Theta\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\right)$$

$$= \Theta\left(n \cdot \frac{3^{\log_2 n}}{n}\right) = \Theta\left(3^{\log_2 n}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) = \Theta\left(n^{1,5}\right)$$

Geometrická řada:

$$S = q^0 + \cancel{q^1} + \cancel{\ldots} + \cancel{q^k}$$

$$q \cdot S = \cancel{q^1} + \cancel{q^2} + \ldots + q^{k+1}$$

$$qS - S = q^{k+1} - 1$$

$$S \cdot (q-1) \quad S = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Implementace:

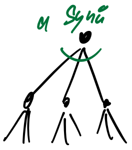
- pro dost malý vstup přepneme na BruteForce alg.

Master Theorem:

$T(n) = a \cdot T(n/b) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ $a \geq 1, b > 1, c \geq 0$

\# op   faktor zmenšení   lokální práce

Nechť $a = b^k$



na i-té hladině: a^i podproblémů velikosti $\frac{n}{b^i}$ } hloubka $= \log_b n$

čas na podproblém $\left(\frac{n}{b^i}\right)^c \to$ čas na hladinu: $a^i \cdot \left(\frac{n}{b^i}\right)^c$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \cdot \left(\frac{n}{b^i}\right)^c = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

$$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i = 1 \implies T(n) = n^c \cdot (\log_b n + 1) \cdot 1 = \Theta(n^c \cdot \log n)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} q^i \leq \sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{1-q} = \Theta(1)$$

$$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i < 1 \implies T(n) = \Theta(n^c)$$

– dominantní práce v kořenu

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} q^i = \frac{q^{\log_b n + 1} - 1}{q - 1} = \Theta\left(q^{\log_b n}\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = \frac{a^{\log_b n}}{b^{c \cdot \log_b n}} = \frac{n^{\log_b a}}{n^c} = n^{\log_b a}$$

$$\left(b^{\log_b n}\right)^c = n^c$$

$$b^{\log_b a \cdot \log_b n} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

$$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i > 1 \implies T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

– dominantní práce ve spod

K důkazu chybí, když n není mocnina b...

$n^+ :=$ nejbližší vyšší mocnina b k n.

$n^- :=$ nejbližší nižší mocnina b k n.

$n^- \leq n \leq n^+$ $n^- \sim n^+$ Asymptoticky se neliší

$$\left(\frac{n}{b}\right)^- \leq \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil \leq \left(\frac{n}{b}\right)^+$$

$$T(n^-) \leq T(n) \leq T(n^+)$$

$\boxed{\times}$

Strassenův alg. pro rychlé násobení matic:

Búno: $n = 2^k$, na $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{array}{c|cc} & n/2 & n/2 \\ \hline n/2 & A & B \\ n/2 & C & D \end{array} \cdot \begin{array}{cc} P & Q \\ R & S \end{array} = \begin{array}{cc} I & J \\ K & L \end{array}$$

X   Y   Z

$I = AP + BR$, podobně u ostatních

Strassenův trik: 7 násobení stačí

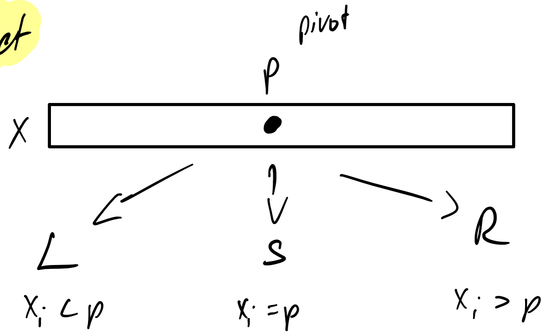
$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2) \implies 7T(n/2) + \Theta(n^2) \implies \Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$$

$n^{2{,}807}$

Selekce – hledání k-tého nejmenšího prvku z $x_1 \dots x_n$ (nesetříděného).

(Využívá se pro hledání mediánu)

QuickSelect



Setřízení: $\boxed{L \mid S \mid R}$

Pokud $k \le |L|$:
k-tý nejmenší $\in L$

Pokud $|L| < k \le |L| + |S|$
Pak je to pivot

jinak
$(k - |L| - |S|)$-tý nejmenší $\in P$

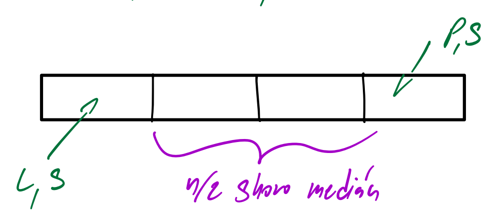
1) Nejlepší případ -> pivot je medián

$|L|, |P| \le n/2 \Rightarrow T(n) = T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow \Theta(n)$

2) Nejhorší případ -> pivot je minimum

$|L| = 0,\ |S| = 1,\ |P| = -1 \Rightarrow T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \dots 1 \Rightarrow \Theta(n^2)$

3)



$|L|, |P| \le \frac{3}{4}n \Rightarrow T(n) = T(\frac{3}{4}n) + \Theta(n) =$

$= n + (\frac{3}{4})n + (\frac{3}{4})^2 n + \dots = \Theta(n)$

Jak ale dostat skoro medián? Randomizované hledání.

1) Vyberu p náhodně.
2) Spočítám $x_i < p$, $x_i > p$
3) Pokud p není skoro medián, restart

$\mathbb{E}$[čas. složitost] $= \Theta(n)$

- stačí $\mathbb{E}$[#pokusů] $= \Theta(1)$

-> $\mathbb{E}$[#pokusů] ≤ 2

P[pokus uspěje] $\ge \frac{1}{2}$

⇓

Lemma o džbánu:

Lemma o džbánu:

Pokud P[uspěje] $= p$,

pak $\mathbb{E}$[#pokusů do úspěchu] $= \frac{1}{p}$

Dk: $\mathbb{E} = \sum_n n \cdot \underbrace{P[\#pokusů = n]}_{(1-p)^{n-1} \cdot p}$

nebo: $\mathbb{E} = 1 + (1-p)\mathbb{E}$

$p \cdot \mathbb{E} = 1$

$\Rightarrow \mathbb{E} = 1/p$

Volím pivota náhodně:

Volím do té doby, než najdu skoro medián

P[fáze hledání skončí] $\ge \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{E}$[pokusů na fázi] ≤ 2

Fáze zmenší n alespoň $\frac{3}{4}$-krát

$\mathbb{E}$[čas na fázi] $= \Theta(n)$

$\sum$ přes fáze -> $\Theta(n + \frac{3}{4}n + (\frac{3}{4})^2 n + \dots) = \Theta(n)$