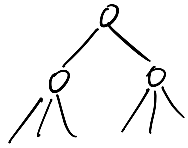
Lemma – (a,b) strom s n klíči má hloubku $\Theta(\log n)$

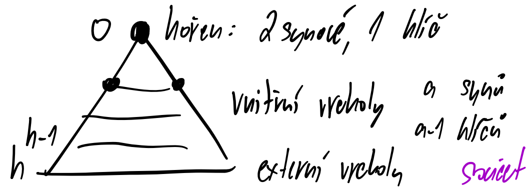
m_h := min # klíčů ve stromu hloubky h

$\forall$ vrchol má min. možný # synů, tedy i klíčů

vrcholů na hladině?

1
2
$2a$
$2a^2$
$\vdots$
$2a^{i-1}$





součet geometrické řady: $\sum_{j=0}^{i} a^j = \frac{a^{i+1}-1}{a-1}$

$$m_h = 1 + \sum_{i=1}^{h-1} 2a^{i-1}(a-1) = 1 + 2(a-1)\sum_{j=0}^{h-2} a^j$$

$$\sum_{j=0}^{h-2} a^j = \frac{a^{h-1}-1}{a-1}$$

$$= 1 + 2\cdot(a^{h-1}-1) = 2a^{h-1}-1$$ ← roste exponenciálně

(Dolní mez)

M_h := max. # klíčů ve stromu hloubky h

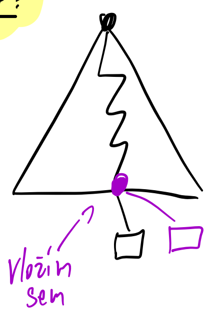
$M_h \sim b^h$ => min. hloubka tedy logaritmicky.

(horní mez)

pak maximální hloubka roste logaritmicky!

Find: $O(1)$ na hladinu => $\Theta(\log n)$ celkem (Jako BST, jen ve vrcholu mám více rozcestí)

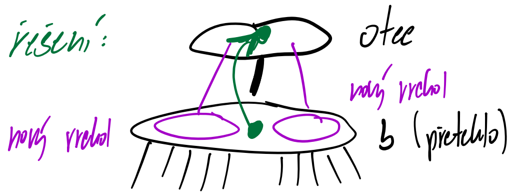
Insert:



Vložíme na nejnižší vnitřní hladinu a ošetříme přetečení (pokud nastalo)

– předtím bylo max. $b-1$ klíčů. --> nově b.

Obecné řešení:

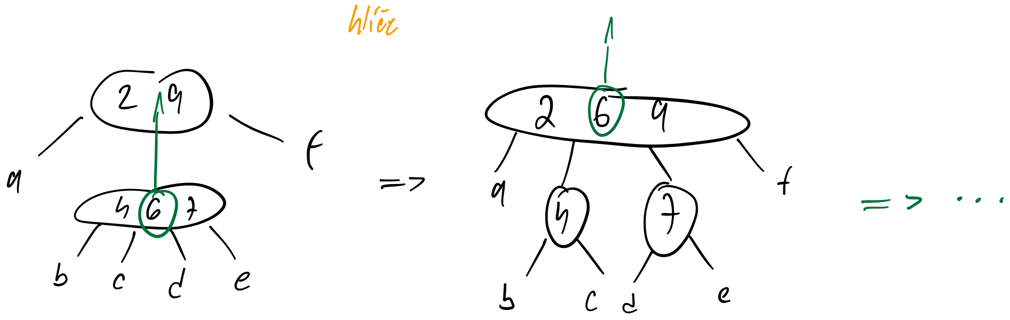


Pokud poté přeteče otec, opakujeme na otce

– což může dojít až do kořene, který taky rozštěpíme

– tam z prostředního klíče udělám nový kořen

Ukázka: (2,3) strom – 1 až 2 klíče



Potenciální problém: poloviny příliš malé

pův. b klíčů, 1 jde do otce

poloviny mají $\lfloor (b-1)/2 \rfloor$ a $\lceil (b-1)/2 \rceil$ klíčů

Problém, pokud $\frac{b-1}{2} < a-1$

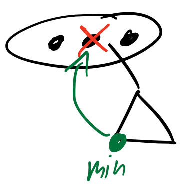
$b-1 < 2a-2$

$\underline{b < 2a-1}$

To je ale ve sporu s definicí, tedy k tomu nikdy nedojde

Delete:

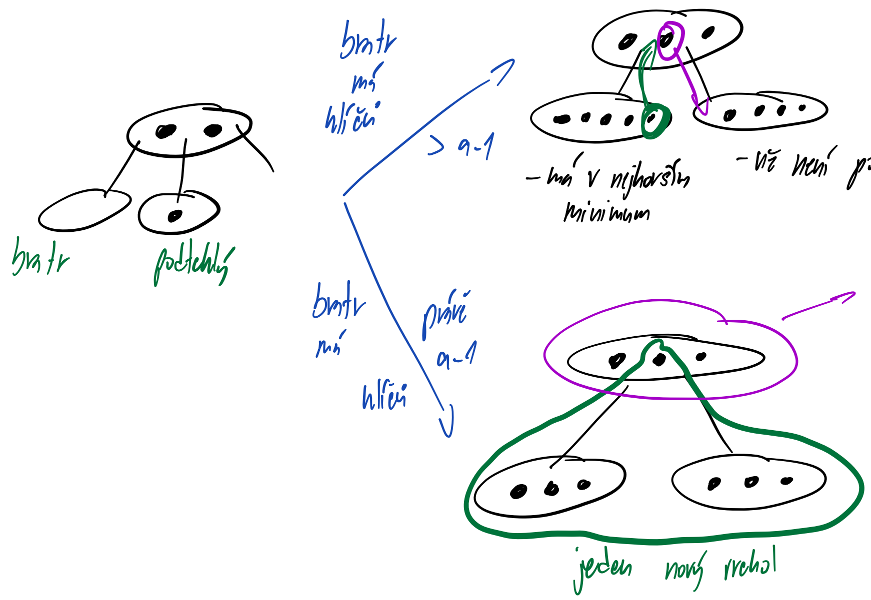
– 2 nejnižší vnitřní hladiny



Může se stát podtečení (vrchol s $a-2$ klíči)

- skrýt vrcholy je potřeba ošetřit
- najdeme levého/pravého sourozence

BÚNO



Vyřešeno půjčením klíče

otec mohl podtéct, pak opakuji.

Vyjde to:

$(a-2)+(a-1)+1 = 2a-2 \leq b-1$

Časová složitost: $\Theta(1)$ na hladinu, $\Theta(\log n)$ hladin $\Rightarrow$ celkem $\Theta(\log n)$ na operaci.

Volba a, b

Nechceme $b \gg 2a$, pak to všechno začne trvat hrozně dlouho

takže buď $b = 2a-1$ nebo $b = 2a$

Nechceme velké a, to taky zpomaluje. Nejlépe $(2,3)$, $(2,4)$ } To na RAM

→ 2a to na disku:

1 blok ~ 1 vrchol (a,b) stromu

4kB bloky, 4B klíče, 4B pointery

$(256, 512)$-strom:

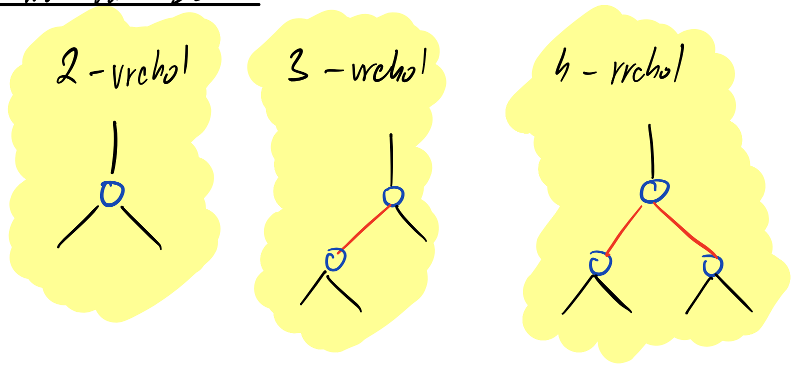
1 vrchol =

512 pointerů $\times$ 4B = 2kB

511 klíčů $\times$ 4B = 2k

Příklad z (2,4) stromu na BST:

Strom s 3 int. hladinách má alespoň 256^3 klíčů $\doteq$ 16M klíčů



Takový přepis je ve skutečnosti bijekce.

LLRB strom je BST s ext. vrcholy a hranami obarvenými červeně a černě t.ž.:

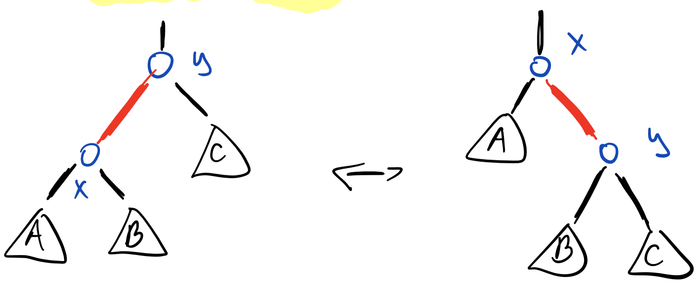
R axiomy
1. Nejsou 2R hrany těsně nad sebou
2. Pokud z vrcholu dolů vede 1R, pak doleva (tohle dělá LL (případně RL))

B axiomy
3. Hrany do listu jsou B
4. Na každé cestě kořen–list je stejný #B hran

Existuje bijekce mezi (2,4) stromy a LLRB (BST) stromy.

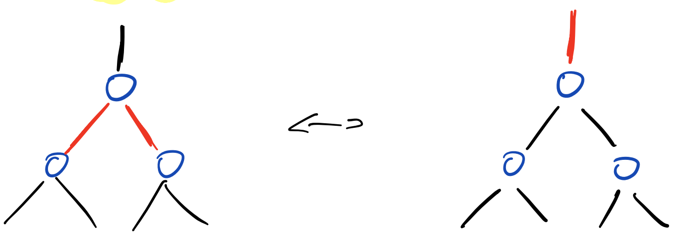
Operace:

Rotace R hrany



Zachovává B axiomy, může rozbít R axiomy

Přebarvení 4-vrcholu

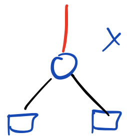


Zachovává B axiomy, může rozbít R axiomy

Insert:

Směrem dolů přebarvujeme 4-vrcholy

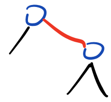
→ může rozbít R axiomy

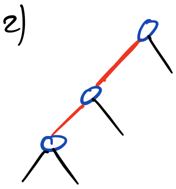
Nahradíme  za 

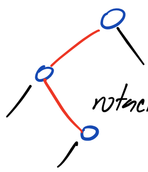
→ zachová B axiomy, R zase rozbití

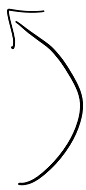
Směrem nahoru opravujeme R axiomy rotacemi:

Mohli jsme vyrobit:

1)  rotací opravíme

2)  rotací

3)  rotací 1 +



↳ Opět trvá $\Theta(\log n)$

(barvičky je vhodné si pamatovat ve vrchních vrcholech hrany)