Datová struktura:

$U :=$ universum

rozhraní:

- fronta, zásobník, posloupnost
- prioritní fronta (halda)
- množina $X \subseteq U$:
  - Find/Member : je prvek v množině
  - insert/delete : ...

  ↑ konečná množina
- slovník $\{(k,v)\} \subseteq U_k \times U_v$ klíč: hodnota

  → částečné zobrazení

  - slovník je prakticky vylepšená množina
- uspořádaná množina/slovník : $U \triangleq$ uspořádané universum
  - Min, Max, Pred, Succ
    (předchůdce, následník)

statické = pole

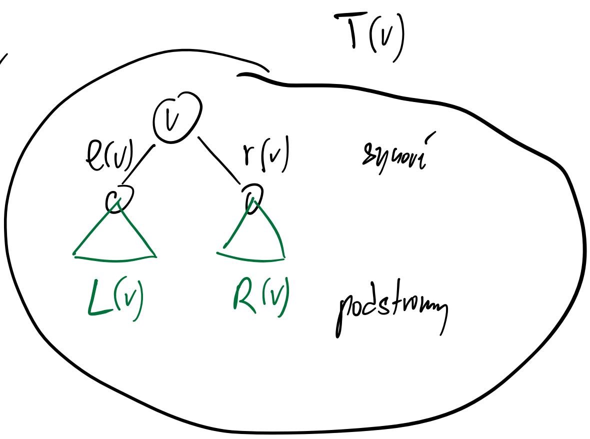
dynamické = dokonale vyvážený strom

implementace:

- pole
- spojový seznam
- binární halda
- BST

Binární strom

- zakořeněný
- značený



$h(v) :=$ hloubka podstromu $T(v) := \#$ hran mezi vrcholem a listem

$n := $ celkový # vrcholů

BST

- Vrcholy obsahují klíče $k(v) \in U$
- $\forall r \in L(v) : k(\ell) < k(r)$
  $\forall r \in R(v) : k(r) > k(v)$ $\Rightarrow$ Všechny klíče různé

Pokud chybí syn: $\ell(v)$ nebo $r(v) = \emptyset$

dodef. $T(\emptyset) = \emptyset$ $h(\emptyset) = -1$

Show (Enumerate)

$\Theta(n)$ – vyjmenuju všechny klíče ve stromu

Find (x)

– porovnávám od kořene a pak se posunuji

Θ(hloubka stromu)

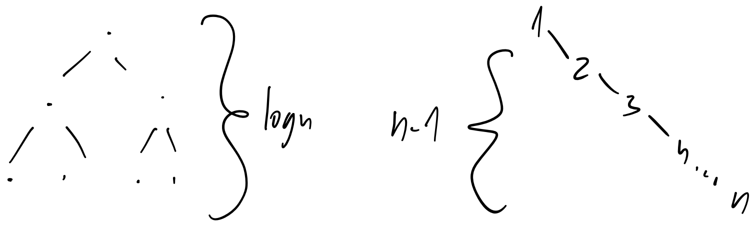
Insert (x)

Opět Θ(hloubka)

Delete (x)

- x je list, najdu a smažu
- x je vnitřní vrchol, jen jednoho syna (nahradím ho synem)
- x je vnitřní a má 2 syny. (Nahradím ho nejbližším listem, pak probublá) Θ(hloubka)

Problém s degenerovaným stromem:



Náhodná data jsou průměrně log n, ale stát se to může.

Dokonale vyvážený BST

Dokonale vyvážený $\iff \forall v: \big||L(v)| - |R(v)|\big| \leq 1$

Hloubka BST $\leq \log_2 n$

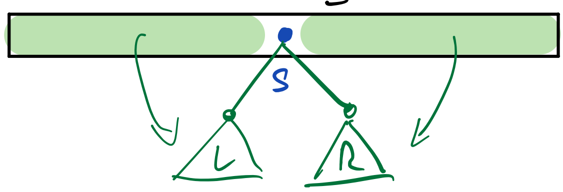
– v každém kroku se pode mnou zmenšil počet vrcholů alespoň 2x.

Posloupnost $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$\Downarrow$

dokonale vyvážený BST

$s = \lceil n/2 \rceil$



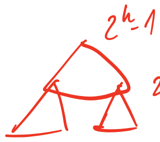
Algoritmus vezme prostředek, vytvoří z něj kořen a pak rekurzivně volá na další poloviny

$\Theta(n)$ – při každém volání vytvořím nový vrchol

V každé implementaci operací Insert, Delete v d.v. BST má alespoň 1 z operací složitost $\Omega(n)$ pro nekonečně mnoho hodnot n.

Dk: Zvolíme $n := 2^k - 1$

klíče $1 \dots n$



$\frac{2^k-2}{2} = 2^{k-1} - 1$

Proveďn Insert (n+1)
Delete (1) } 2 … n+1 → zase jedno změní

$\Omega(n)$ vrcholů změnilo, zdali jsou listy

v každém změna minimálně jednoho ukazatele

Pak znovu
Insert (n+2)
Delete (2) } opět stejný princip

Tedy dvojice Insert a Delete dohromady dají $\Omega(n)$, takže jedno z toho musí trvat dlouho.

Z toho ale vychází, že takový strom není praktický

Strom je hloubkově vyvážený ≡ AVL-stromy

$$\forall v: \Big|\, |h(\ell(v))| - |h(r(v))| \,\Big| \le 1$$

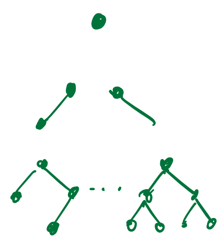
dokonale vyvážený
$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$
hloubkově vyvážený

Hloubka AVL-stromu s n vrcholy je $\Theta(\log n)$

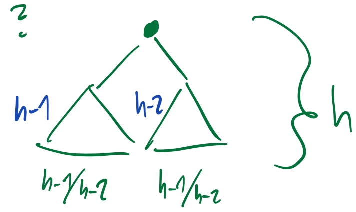
$A_0 = 1$

$A_1 = 2$

$A_2 = 4$



$A_h = ?$



$A_h = 1 + A_{h-1} + A_{h-2}$

Počítáme $A_h :=$ min # vrcholů AVL stromu hloubky h

Indukcí podle h: – chceme dokázat, že $A_h \ge 2^{h/2}$ (horní odhad)

① $h = 0 \quad A_0 = 1 \ge 2^0 = 1$

$h = 1 \quad A_1 = 2 \ge 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414$

② $h \ge 2 \quad A_h \ge A_{h-1} + A_{h-2} = 2^{\frac{h}{2}} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\ge 1} \ge 2^{h/2}$

$A_{h-1} \ge 2^{\frac{h-1}{2}} = 2^{\frac{h}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

$A_{h-2} \ge 2^{\frac{h-2}{2}} = 2^{\frac{h}{2}} \cdot 2^{-1}$

$\Rightarrow \exists c > 1 : A_h \ge c^h \qquad c = \sqrt{2} \doteq 1{,}414$

$\Rightarrow$ strom na n vrcholech má hloubku $\le \log_2 n$

Dolní odhad:

$B_h :=$ max # vrcholů stromu hloubky h

$B_h = 2^{h+1} - 1$ (indukcí)

$\Downarrow$

$h \ge \log_2 n + 1 \Rightarrow$ hloubka $\in \Theta(\log n)$