Dijkstrův alg.

Časová složitost:

- jeden cyklus jde přes všechny nenavštívené vrcholy
  - druhý z takových vrcholů hledá všechny cesty.

To celé má složitost $O(n^2)$
- vnější hledání proběhne nejvýš n-krát
- uvnitř pak lineárně procházím ostatní vrcholy a hrany.

Postup algoritmu:

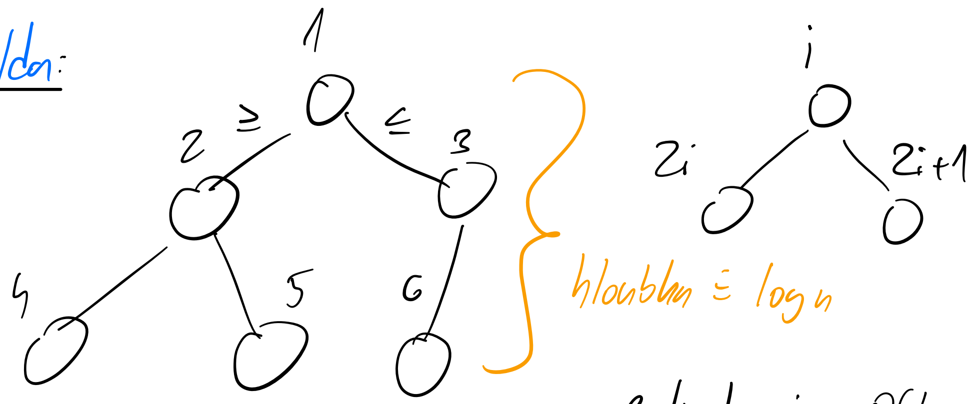
1) $\forall v\ h(v) \Leftarrow +\infty,\ s(v) \Leftarrow$ nenavštívený
2) $h(u) \Leftarrow 0,\ s(u) \Leftarrow$ otevřený
3) $v \Leftarrow$ otevřený s min. $h(v)$
4) Pro všechny hrany vw:
5) Pokud $h(v) + \ell(v,w) < h(w)$
6) $h(w) \Leftarrow h(v) + \ell(v,w)$
7) $s(w) \Leftarrow$ otevřený
8) $s(v) \Leftarrow$ zavřený

Chceme DS pro dynamické minimum
- pamatuje si otevřené vrcholy a jejich ohodnocení
- Operace:
  - extract min. - najde a smaže vrchol s min. ohodnocením $\leq n$ (vrcholů)
  - insert - vloží nový vrchol $\leq n$ (vrcholů)
  - Decrease - sníží ohodnocení vrcholu $\leq m$ (hran)

$$O(n \cdot T_{insert} + n \cdot T_{extr\,min} + m \cdot T_{decrease})$$

Pole: $(n\cdot 1 + n\cdot n + m\cdot 1) = O(n^2)$ –> nic neušetřeno

Binární halda:



vlevo menší, vpravo větší

prvek je sice nahoře, ale pak musím probublat novou hodnotu.

extract min $= O(\log n)$
Insert $= O(\log n)$
Decrease $= O(\log n)$

- Zároveň se ale musí uchovávat, kde se jednotlivé prvky nachází, protože halda není vyhledávací strom.

Složitost?

$$O(n\cdot\log n + n\cdot\log n + m\cdot\log n)$$

$$O\dots(n\log n) \text{ až } (n^2\log n)$$

Je to pomalé pro husté grafy!

–> Existuje Fib. halda:
Insert, Decrease ~ $O(1)$
Extract ~ $O(\log n)$
⇓
Dijkstra ~ $O(n\log n + m)$

Relaxace:

- Snažím se $h(w)$ snížit na $h(v) + \ell(v,w)$

Jsou potřeba stavy, abych se nezacyklil:
- otevřený: od předchozí relaxace se hodnota změnila –> má smysl znovu relaxovat.

Obecný relaxační algoritmus:

1. $\forall v$ $h(v) \leftarrow +\infty$, $s(v) \leftarrow$ nenavštívený, $h(u) \leftarrow 0$, $s(u) \leftarrow$ otevřený
2. Dokud $\exists v$ otevřený: relaxuji v Dijkstra: vybere v otevřený s min. $h(v)$

Pro grafy, které mohou mít záporné hrany:

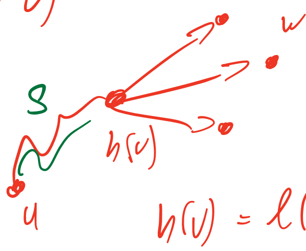
Invariant O: —> invariant popisuje nějaké věci algoritmu, co se nemění

1) $\forall v$ $h(v)$ nikdy neroste
2) pokud je $h(v)$ konečné, je rovno nějakému u,v sledu.

(1) - relaxace jenom snižuje, není tedy jak zvýšit.

(2) inic. OK (vrchol 0)

Relaxace:



$h(v) = \ell(S)$

$h(v) + \ell(v,w) = \ell(S')$: $S' = S + (v,w)$

tedy je to délka nějakého sledu

$\boxed{V}$

Lemma o dosažitelnosti:

Pokud se algoritmus zastaví, $\forall v \in V$: v je dosažitelný z u, ⟺ v je uzavřený, ⟺ $h(v)$ je konečné.

viz korektnost BFS/DFS

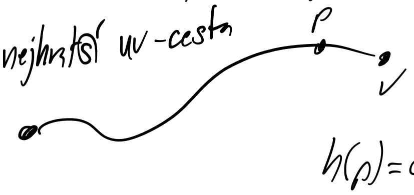
Jakmile mám něco dosažitelného a program skončí, musí to být zavřené, jinak bych nezavřel nic jiného v grafu.

Lemma o vzdálenosti:

Pokud se algoritmus zastaví, $\forall v \in V$: $h(v) = d(u,v)$, kde u je začátek

- pokud není v dosažitelný, pak $h(v) = +\infty$, $|d| = +\infty$
- Pokud je dosažitelný, je i vzdálenost konečná.
  - díky Inv. O : $h(v) \geq d(u,v)$
    - Sporem: Kdyby $h(v) < d(u,v)$ —> v je „špatný" vrchol
      - vybereme v „špatný", t.ž. nejkratší uv-cesta má nejméně hran

$u \neq v$



v je špatný, má dobrého předchůdce p.:

$h(p) = d(u,p)$

Někdy jsme tuto $h(p)$ museli nastavit

– tehdy jsme p otevřeli, později museli relaxovat

– tedy projít všechny následovníky, což je i v.

- Po relaxaci: $h(v) \le \underbrace{h(p) + \ell(p,v)}_{d(u,p) + d(p,v) \,=\, d(u,v)}$

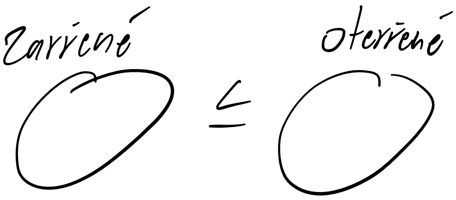
$\boxed{\lightning}$ $h(v) \le d(u,v)$

Zpět k Dijkstře:

Na grafu s $\ell \ge 0$

Invariant M:

Kdykoliv je o otevřený vrchol a z zavřený, pak ① $h(z) \le h(o)$ ② $h(z)$ se nemění



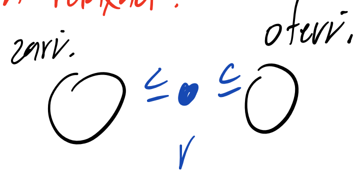
– ty zavřené jsou prostě „blíž" jak ty otevřené.

– zároveň na zavřené už nesáhneme

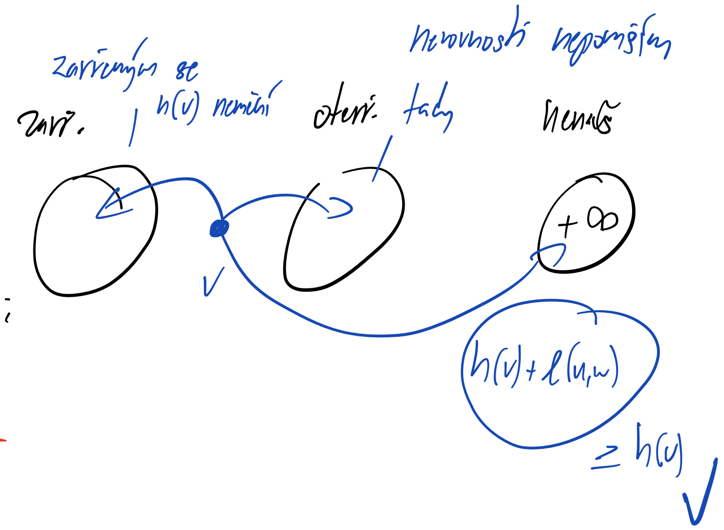
Indukcí podle výpočtu:

a) započátku ✓

b) při relaxaci:



$h(z) \le h(v) \le h(o)$ ⇒: $\boxed{✓}$



Věta: Dijkstrův alg. zavírá vrcholy v pořadí podle vzdálenosti, každý dosažitelný právě 1, $h(v)$ v okamžiku zavření je rovno $d(u,v)$.

Důkazy jsou poskládané výše: ① Lemma dosažitelnosti (otevření/zavření právě 1)

② Zavřený vrchol nemění ohodnocení – zavřený tedy jen jednou. (Lemma o vzdálenosti)

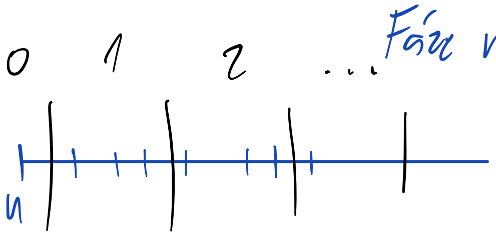
③ Od zavření se hodnocení nemění, tedy ve chvíli zavírání je hodnocení finální.

Bellman-Ford alg.

- relax. alg.
- otevřené vrcholy ve frontě

↳ zavírá nejstarší otevřený vrchol

Bellman-Ford spočítá vzdálenosti $d(u,z)$ v čase $O(n \cdot m)$ pro libovolný graf bez záporných cyklů.



Fáze výpočtu: $F_0 :=$ otevření u

$F_i :=$ zavírání vrcholů otevřených v F_{i-1} a otevírání jejich následovníků

Invariant: Na konci fáze F_i $\forall v \in V$: $h(v) \leq$ délka nejkratšího uv-sledu o max i hranách.

↳ Po nejvýše $n-1$ fázích platí: $h(v) \leq d(u,v)$

$\Rightarrow$ n-tá fáze už nic neotevře. $\Rightarrow$ $\#$fází $\leq |V(G)|$

Indukcí podle i:

a) pro $i=0$ ✓ b) Nechť jsme na konci $(i+1)$-té fáze, vrchol v, nejkratší uv-sled S

pokud S má $\leq i$ hran, už to platí už v předchozí fázi

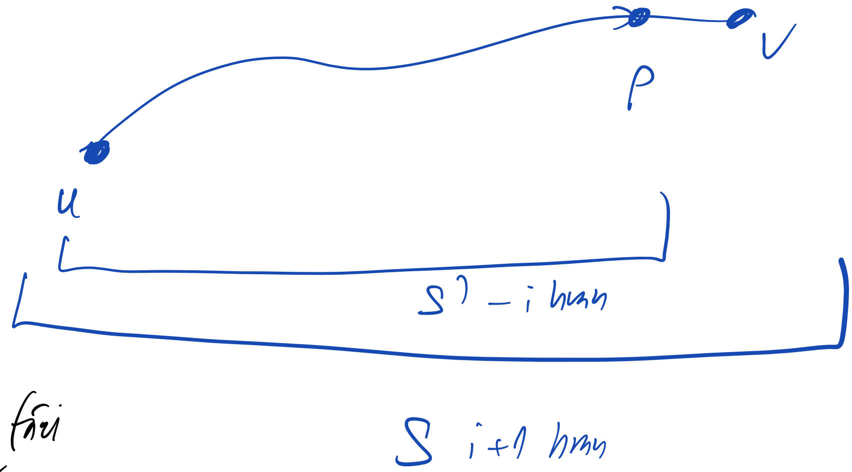
S má právě i hran:

Podle IP na konci F_i

máme $h(p) \le \ell(s')$

nastaveno nejpozději v i-té fázi.

→ nejpozději v i+1-té fázi zavřen, tehdy relaxován.



Proto $h(v) \le \underbrace{\underbrace{h(p)}_{\le \ell(s')} + \ell(p,v)}_{\le \ell(s)}$