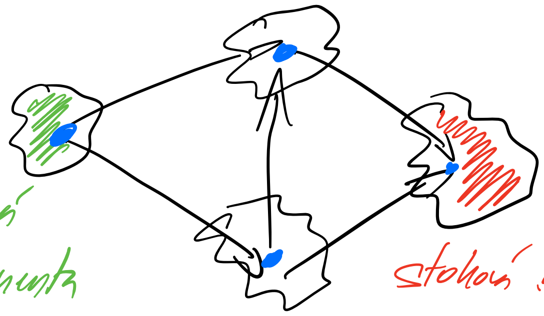
Silná souvislost: Existuje cesta mezi všemi vrcholy v orientovaném grafu

Graf komponent $C(G)$:

- vrcholy jsou komponenty
- je to DAG (nejsou tam orientované cykly)



Zdrojová komponenta
- nic do ní nevede

stoková komp.
- nic z ní nevede

Jednoduše se hledá vrchol ve zdrojové komponentě. Opakovaným DFS prohledáním (vždy z ještě nenavštívených vrcholů) a vrchol s největším číslem out je určitě ve zdrojové komp.

?
Při vyhledávání se nikdy nedostanu z této komponenty.

↳ Poslední vrchol, který jsme opustili, musí ležet ve zdrojové komponentě, jinak bychom ho už navštívili.

Našli jsme zdrojovou. Jak ale najít stokovou?

$$G^T := (V(G), \{vu \mid uv \in E(G)\})$$

→ tedy jsme doslova otočili orientaci šipek.

G je DAG $\Longleftrightarrow$ G^T je DAG. $\Rightarrow$ mají stejné ekv. třídy.

Zdroj $\xleftrightarrow{G^T}$ stok : protože jsme otočili šipky v orientovaném grafu, takže nyní hledám opět zdrojovou komponentu, která je ve skutečnosti stoková.

↳ Takhle je to korektní, ale pomalé. Protože prohledávám znovu a znovu zbylé komponenty.

Projdeme tedy vrcholy v pořadí klesajících outů v G^T, pokud ještě nemají přiřazenou komponentu, spouštím na nich DFS.

- Musím ale dokázat, že po ukončení prohledávání v jedné komponentě je další nenavštívený vrchol s nejvyšším outem další stoková.

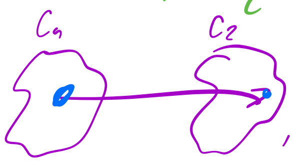
Lemma: Pokud C_1, C_2 jsou komponenty t.ž. $C_1C_2 \in E(C(G))$, pak:

$$\max_{u \in C_1} out(u) > \max_{v \in C_2} out(v)$$

↳ orientovaný graf!!

v DFS na H

Ukážu, mám dvě komponenty



, tak z té první odejdu později.

Případy: → DFS vstoupí do C_1 před C_2.

- pak to platí. Nejdřív prohledám C_1, pak skočím do C_2, tu prohledám a do C_1 se vrátím až později.

DFS vstoupí do C_2 první

- zase první musím prohledat celou C_2 a do C_1 nevstoupím, jinak by to byla stejná komponenta. Každopádně do C_1 vstoupím až později po ukončení C_2, tedy zase bude out u vrcholu v C_1 mít větší out.

Algoritmus:

1. Sestrojíme G^T $\quad O(n+m)$
2. $Z \leftarrow$ prázdný zásobník – konst $\quad \nearrow O(n+m)$
3. Opakovaní DFS v G^T, při opuštění vrcholu přidávám do Z. (v pořadí rostoucích outů)
4. $\forall v$ komp$(v) \leftarrow \emptyset$ $\quad O(n)$
5. Postupně odebíráme vrcholy ze Z, pro vrchol v: pokud komp$(v) = \emptyset$ $\quad O(n)$

(6)

(7) Spustíme DFS v G z vrcholu v, chodíme jen do vrcholů s $komp = \emptyset$
a nastavujeme $komp \leftarrow v$ — $O(n+m)$

Celkově tedy lineární časová i paměťová složitost.

Algoritmus najde komponenty silné souvislosti v čase a prostoru $\Theta(n+m)$.

Kde používáme v praxi?

- ověření silné souvislosti (pokud existuje jenom jedna či více komp.)
- často se používá hlavně jako nástroj do mezivýsledku

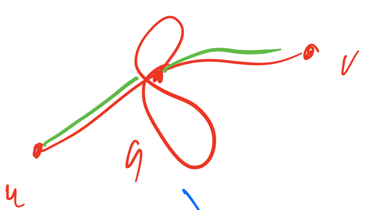
Nejkratší cesty v ohodnoceném grafu:

$\ell : E \to \mathbb{R}_0^+$: délka hrany

Vzdálenost je délka nejkratší cesty.

- délka cesty P: $\ell(P) := \sum_{p \in P} \ell(p)$
- vzdálenost $d(u,v) := \min\{\ell(P) \mid P \text{ je } u,v\text{-cesta}\}$
  - pokud neexistuje cesta, $d = +\infty$

Pokud s je u,v-sled, pak $\exists P$ u,v-cesta t.ž. $\ell(p) \leq \ell(s)$



- pokud je sled cesta, hotovo.
- Jinak se mi nějaký vrchol opakuje.

vyberu část před prvním a po posledním výskytu q.

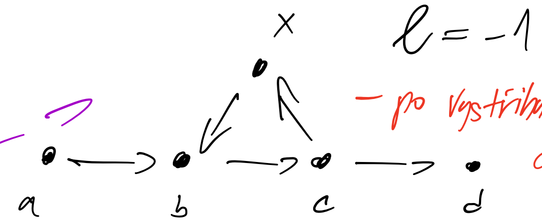
Taková cesta musí být nejvýš stejně dlouhá nebo kratší.

$d(u,v) = \min\{\ell(s) \mid s \text{ je } u,v \text{ sled}\}$

Δ nerovnost: $\forall u,v,w \quad d(u,v) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Záporní hrany

$\ell = -1$



– po vystřihnutí cyklu se délka „protáhla"

každým dalším průchodem smyčky by se sled „zkrátil", takže to jde do nekonečna a nejde vzdálenost určit

$d(a,d) = -3$

$d(a,x) = -3$

$d(x,d) = -3$

$\Delta \neq: \; -3 \leq -3 + -3$

$-3 \nleq -6$

Najít nejkratší cestu je těžší.

Nic z toho se neděje, pokud jsou zakázané záporné cykly.

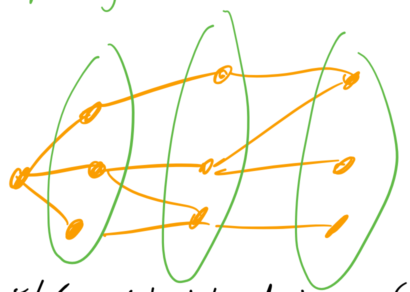
Důležité případy:

$\boxed{\text{- konstantní vzdálenost všech hran:}}$

- klasické BFS

$O(n+m)$

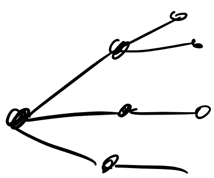
vrstvy ≈ vzdálenosti od startu



- každý vrchol tak dostane číslo vrstvy, tedy délku cesty.
- pro rekonstrukci cesty si pamatuji i předchůdce.

Strom nejkratší cesty:

- cestu lze reprezentovat stromem:

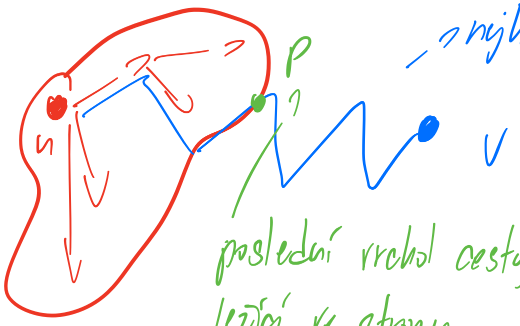


- strom na V
- podgraf G
- orientovaný od kořene, kterým je start hledání
- $\forall v \in V$: cesta ve stromu (u,v) je jedna z nejkratších v G.

Kompaktní reprezentace z u do kamkoliv.

– Z každé vzdálenosti mezi (u,x) bude zobrazena pouze jedna cesta, přestože v G jich může být nekonečno.

Strom nejkratších cest existuje i v ohodnocených grafech:



nejkratší (u,v) cesta

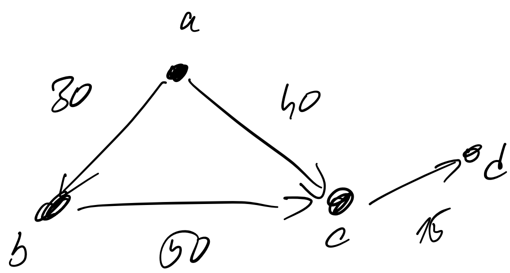
poslední vrchol cesty ležící ve stromu.

Pak vše mezi (p,v) je vidět stromu, protože to je část cesty.

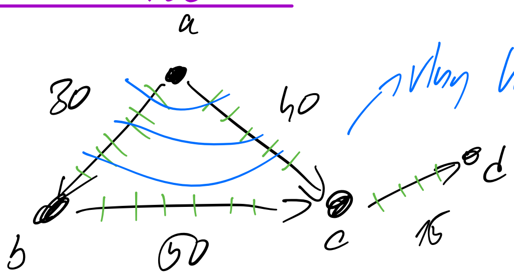
Prefix nejkratší cesty je zase nejkratší cesta.

Pokud (u,v) je nejkratší cesta, pak (u,w) má nejkratší cestu stejnou. Jinak by se dalo z u do w dojít jinudy a šlo by se tak i z u do v.

$\ell(e) \in \mathbb{N}$ a nemusí být stejné pro všechny hrany:



Složité řešení:



vlny hrotu

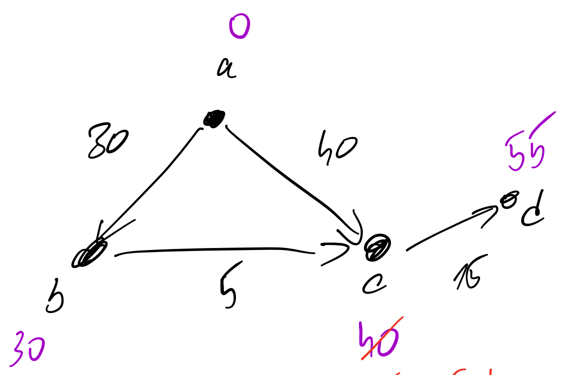
- rozdělím si hrany na jednotkové hrany... Pak spustím BFS.

maximální délka

↳ Nový graf $O(m \cdot L)$ hran

Lepší řešení:

- Budeme mít „budíky" pro jednotlivé vrcholy.
  - ten zazvoní, když se poprvé vlna dostane do vrcholu. (např. b má budík 30).



—> 35 (zleva přes b je to rychlejší)

-> Pokud se dostanu do vrcholu, kde už je nastaven budík a jeho hodnota je vyšší než bych nastavil já, přepíšu jeho budík, protože moje cesta reprezentuje nejlevnější cestu.

Dijkstrův alg.