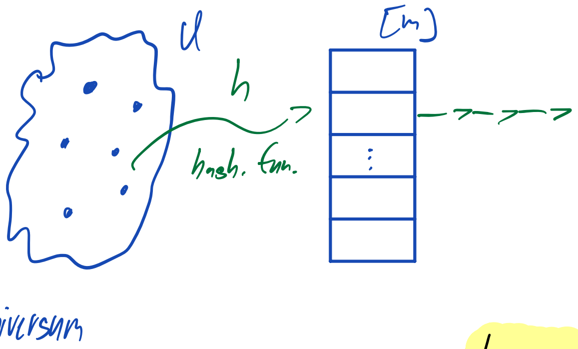


Systém funkcí z U do $[m]$ je c-univerzální,

pro $c > 0$: $\forall x, y \in U, x \neq y$: $P[h(x) = h(y)] \leq \frac{c}{m}$

Víme: $\exists$ 1-Univerzální systém

Lemma: Nechť $\mathcal{H}$ je c-univerzální systém fcí z U do $[m]$, $x_1 \ldots x_n \in U$ navzájem různé, $y \in U$

Potom: $\mathbb{E}_{h \in \mathcal{H}}\left[\#i : h(x_i) = h(y)\right] \leq c \cdot \frac{n}{m} + 1$

„střední hodnota obsazení přihrádky, kam padlo y".

Důsledek

$\mathbb{E}$ časové složitosti operací Find, Insert, Delete je $O\left(\frac{n}{m}\right)$

Což umíme přehashováním držet na $O(1)$

Dk: Předpoklad: $\forall i \; y \neq x_i$

Případ $y = x_i$ zařídí „+1" na konci

Pomocí indikátorů:

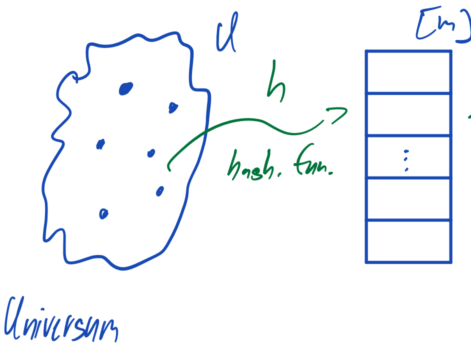
$I_1 \ldots I_n$:

$$I_i := \begin{cases} 0 & \\ 1 & \text{pro } h(x_i) = h(y) \end{cases}$$

- $Y = \sum_i I_i$
- $\mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{E}[I_i]$
- $\mathbb{E}[I_i] = P[h(x_i) = h(y)] \leq \frac{c}{m}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] \leq c \cdot \frac{n}{m}$

Otevřená adresace:



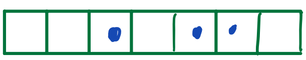
Každé políčko je prázdné, nebo drží jeden prvek

Df: $\forall x \in U$ přiřadíme vyhledávací posloupnost

$h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2) \ldots, h(x, m-1)$

což je permutace na $[m]$

Operace:



Insert(x) – bude v pořadí daném permutací procházet jednotlivé pozice, než narazí na prázdnou

Find (x) – Bude procházet v pořadí permutace
–zastaví se o prvek / s prázdnou první přihrádkou
– dál už totiž žádný prvek nebude

Příklady:

Lineární přidávání:

– první prvek pomocí hash f, pak už lineárně hledám volná místa

$h(x, i) = (f(x) + i) \bmod m$

degradace

0	1	2	3	4	5	6	7		
		42		14	75	36	24	95	17

Vložím: 75, 36, 14, 42, 24, 95, 17

Delete(x) – prvek se nahradí pomníčkem
(Insert umí přepsat pomníčky)
– je potřeba ale pravidelně přehashovat

Dvojité hashování:

$$h(x,i) = \left(f(x) + i \cdot g(x)\right) \bmod m$$

prvočíslo

2 hash fce

– každý prvek má vlastní délku skoku, takže se to nesmrskne

Věta: Pokud vyhl. posl. jsou nezávislé plně náhodné permutace, pak $\mathbb{E}[\#\text{ přihrádek navštívených při neúspěšném Findu}] \le \frac{1}{1-\alpha}$, kde $\alpha = \frac{n}{m}$

Důkaz

Nechť $y \in U$ hledáme, $h_1 \ldots h_m$ je jeho vyhledávací posl.

$P_i := P[\text{projdeme alespoň } i \text{ přihrádek}]$

$P_1 = 1$

$$P_i = 1 \cdot \frac{n}{m} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{m-1}}_{\le \frac{n}{m}} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{m-2}}_{\le \frac{n}{m}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-(i-1)}{m-(i-1)}}_{\le \frac{n}{m}} \le \alpha^{i-1}$$

$$\mathbb{E}[\#\text{ navštívených přihrádek}] = \sum_{j \ge 1} j \cdot \underbrace{P[\text{navštívíme právě } j]}_{(P_j - P_{j+1})}$$

$$= \sum_{j \ge 1} P_j \left(j - (j-1)\right)$$

$$\le \sum_{j \ge 1} \alpha^{j-1} = \sum_{j \ge 0} \alpha^j = \frac{1}{1-\alpha}$$

Rozděl a panuj!

– Většinou řešeno rekurzivně

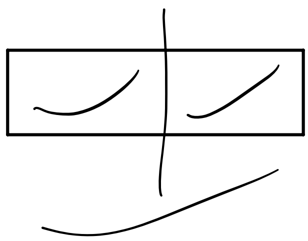
MergeSort $\longrightarrow$ Merge$(x_1 \ldots x_a, y_1 \ldots y_b)$ v čase $\Theta(a+b)$

MergeSort$(x_1 \ldots x_n)$: → pokud $n \le 1$, return input

$a_1 \ldots a_{\lfloor n/2 \rfloor} \leftarrow$ MergeSort$(x_1 \ldots x_{\lfloor n/2 \rfloor})$

$\leftarrow$ MergeSort$(x_{\lfloor n/2 \rfloor} \ldots x_n)$

Returns Merge$(a_1 \ldots, b_1 \ldots)$



Analýza složitosti MergeSortu: (BÚNO: $n = 2^k$)

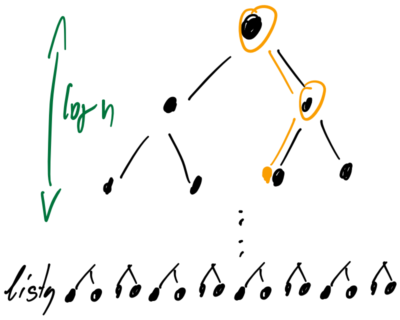
$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$\vdots$ $\quad \Theta(n)$?

$$T(1) = 1$$

} rekurentní rovnice

Strom rekurze:



# problémů	Velikost problému	čas hladiny	Paměť
1	n	n	n
2	$n/2$	n	$n/2$
4	$n/4$	n	$n/4$
2^i	$n/2^i$	n	$n/2^i$
1	n	n	1

Celkem $n \cdot \log n$

$\Sigma \leq 2n$

Ideální rozepsat:

$$T(n) = 2\underbrace{T(n/2)}_{2 \cdot T(n/4) + n/2} + n$$

$$T(n) = 4 \cdot \underbrace{T(n/4)}_{2 \cdot T(n/8) + n/4} + 2n$$

$$T(n) = 8 \cdot T(n/8) + 3n$$

$\vdots$

$$T(n) = 2^i \cdot \underbrace{T(n/2^i)}_{T(1) \text{ pro } n/2^i = 1} + i \cdot n$$

čili $i = \log n$

Když jsem narazil na okrajovou podmínku $n/2^i = 1 \Rightarrow n = 2^i$

$$T(n) = n \cdot T(1) + \log n \cdot n \; \ldots \; \Theta(n \cdot \log n)$$

A co paměť mergesortu?

V čase počítám jen jednu půlku volání, takže paměť můžu recyklovat

$$M(n) = M(n/2) + n$$

$$M(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots \quad \text{je } \Theta(n)$$